$f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer qu'il existe un réel unique α appartenant à]Log2,1[tel que $f(\alpha)=0$.

3) Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

B- Soit g une fonction numérique à variable réelle définie et dérivable sur un intervalle [a,b]. On suppose de plus que g' est continue sur l'intervalle [a, b] et qu'elle est dérivable sur]a, b[. On définit alors la fonction φ sur [a,b] par :

$$\varphi(x)=g(b)-g(x)-(b-x)g'(x)-[\frac{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}{(b-a)^2}](b-x)^2$$

1) Ecrire l'expression de $\varphi'(x)$ pour tout x élément de]a, b[.

2)a- Vérifier que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

b- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c élément de]a, b[tel que $\varphi'(c)=0$.

3) Déduire de ce qui précède que le réel c vérifie :

$$g(b)=g(a)+(b-a)g'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}g''(c)$$

C- Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle [Log2,1] (f étant la fonction définie dans la partie **A-** du problème).

1) Vérifier que : Pour tout $x \in$]Log 2, 1[on a $h'(x) < 0$ et $h''(x) > 0$.

2) Soit t un réel appartenant à]log2,α[(où α est le réel défini à la deuxième question de la partie **A-** et soit M le point de coordonnées (t,h(t)). La tangente en M à la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse t'.

a- Montrer que $t'=t-\frac{h(t)}{h'(t)}$

b- En appliquant le résultat établi à la 3ème question de la partie **B**, montrer qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle]t,α[tel que:

$$t'=\alpha+\frac{(\alpha-t)^2h''(k)}{2h'(t)}$$

c- Déduire de ce qui précède, que t' appartient à l'intervalle]Log2,α[.

3) Soit x_o un réel appartenant à l'intervalle]Log2,α[,on définit la suite (x_n) par : pour tout entier naturel n; $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$.

a- Montrer que :Pour tout entier n, x_n appartient à l'intervalle]Log2,α[

b- Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

4)a- En remarquant que $\forall n \in$ IN on a : $x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{h(\alpha)-h(x_n)}{h'(x_n)}$